

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ (Γ.Π.)
(LINEAR PROGRAMMING)

Δρ. Βασιλική Καζάνα

Αναπλ. Καθηγήτρια

*ΤΕΙ Καβάλας, Τμήμα Δασοπονίας & Διαχείρισης Φυσικού Περιβάλλοντος
Δράμας*

Εργαστήριο Δασικής Διαχειριστικής

Τηλ. & Φαξ: 25210 60435

E-mail: vkazana@teikav.edu.gr

Γραμμικός
προγραμματισμός →

Μαθηματική τεχνική για να
βρίσκουμε τις άριστες
χρήσεις περιορισμένων
πόρων μίας επιχείρησης ή
οργανισμού ή συστήματος.

ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Γραμμικός → Περιγράφει γραμμική σχέση ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες μεταβλητές.

Προγραμματισμός → Αναφέρεται στην χρήση μαθηματικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για να βρούμε την καλύτερη δυνατή λύση σε προβλήματα με περιορισμένους πόρους.

ΚΥΡΙΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Γ.Π.

1. Η επιχείρηση , ο οργανισμός ή το σύστημα θα πρέπει να πετύχει κάποιο αντικειμενικό σκοπό (objective).
2. Πρέπει να υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι δράσης (alternative courses of action) για την επίτευξη του αντικειμενικού σκοπού.
3. Οι πόροι πρέπει να είναι περιορισμένοι .
4. Ο αντικειμενικός σκοπός και οι περιορισμοί πρέπει να μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις

* Οι περισσότεροι περιορισμοί στα προβλήματα Γ.Π. εκφράζονται σαν ανισώσεις. Έτσι επιτρέπουν πολλές δυνατές λύσεις.


ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ Γ.Π.

* Είναι δυνατή μόνο όταν υπάρχουν 2 ή 3 μεταβλητές.

Διαδικασία

1. Διαμορφώνουμε την πληροφορία σε μαθηματική μορφή. Υπάρχουν 2 μαθηματικές εκφράσεις στα γραμμικά προγράμματα :

Αντικειμενική
συνάρτηση
(objective
function)



Έκφραση που δείχνει την σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές του προβλήματος και τον σκοπό της επιχείρησης, του οργανισμού ή συστήματος. Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να βρίσκεται σε 2 κατευθύνσεις :

Μεγιστοποίηση (π.χ. κέρδους)

Ελαχιστοποίηση (π.χ. κόστους)

Εκφράσεις (κυρίως ανισώσεις) που δείχνουν ένα όριο στην διαθεσιμότητα των πόρων.

Περιορισμοί (Constraints)

Μπορεί να είναι μη-αρνητικοί περιορισμοί (non negative constraints) που εννοούν ότι η λύση του γραμμικού προγράμματος βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο, όπου οι τιμές είναι θετικές (έτσι ώστε να έχουν νόημα οι απαντήσεις). Όλοι οι μη αρνητικοί περιορισμοί λέγονται δομικοί (structural constraints).

2. Σχεδιάζουμε τους περιορισμούς σε γραφικό

Ο αντικειμενικός σκοπός σε γραμμική μορφή λέγεται *αντικειμενική συνάρτηση* , οι εναλλακτικές λέγονται *μεταβλητές απόφασης* , οι δε πόροι σε γραμμική μορφή λέγονται *περιορισμοί*.

Μαθηματικά

$$\begin{array}{l} \text{MAX} \\ \text{(MIN)} \end{array} \quad Z = C_1 * X_1 + \dots + C_n * X_n$$

έτσι ώστε

$$\alpha_{11} * x_1 + \alpha_{12} * x_2 + \dots + \alpha_{1n} * x_n \leq b_1$$

(\geq) .

$$\alpha_{21} * x_1 + \alpha_{22} * x_2 + \dots + \alpha_{2n} * x_n \leq b_2$$

(\geq) .


$$a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + \dots + a_{mn} * x_n \leq b_m$$

(\geq) .

$$X_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,\dots,n)$$

Που σημαίνει

να βρεθούν οι τιμές των x_j που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την συνάρτηση Z εφόσον ικανοποιούν τους δοσμένους περιορισμούς.

x_j → Μονάδες προϊόντος j που πρέπει να παραχθούν σε ορισμένο χρονικό διάστημα ή δραστηριότητες που πρέπει να επιδιωχθούν σε ορισμένο χρόνο.

c_j → Μεταβολή του Z όταν το j μεταβάλλεται κατά μία μονάδα

b_i → Ποσότητα συντελεστού παραγωγής i που διατίθεται για παραγωγή ή προϊόντων .

d_{ij} → Ποσότητα συντελεστού παραγωγής i που καταναλώνεται κατά μονάδα συντελεστού j .
($i=1,2,,n$)

Η περιοχή που περιέχει όλες τις δυνατές λύσεις που είναι εφικτές (feasible) , δηλαδή ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος λέγεται περιοχή εφικτών λύσεων (feasible region).

3. Βρίσκουμε τα σημεία που προσδιορίζουν την περιοχή εφικτών λύσεων

4. Σχεδιάζουμε την καμπύλη ίσων εκροών (isoprofit line) και την μετατοπίζουμε παράλληλα έτσι ώστε η συνολική εκροή (π.χ.) κέρδος να αυξάνει μέχρι του σημείου που οποιαδήποτε μετατόπιση θα μετακινούσε την καμπύλη έξω από

Σημείωση

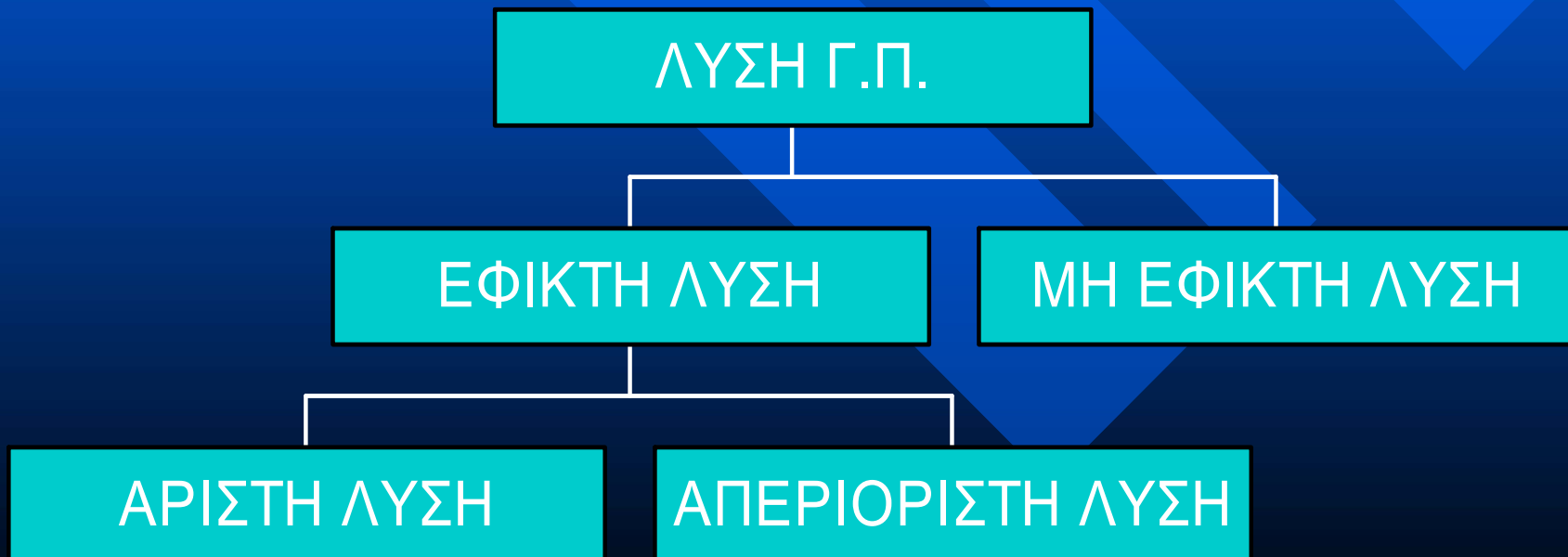
Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και στα γραμμικά προγράμματα όπου επιχειρείται η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

Διαφορά υπάρχει μόνο στο 4^ο πεδίο όπου η καμπύλη ίσων εκροών (isocost line) μετατοπίζεται παράλληλα έτσι ώστε το συνολικό κόστος να μειώνεται.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων Γ.Π. είναι ως εξής κατά την χρήση του προγράμματος **LINDO** στους Η/Υ.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ



ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΤΟΥ Γ.Π.

ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΤΗΤΑ

Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι άμεσα αναλογική με το επίπεδο της δραστηριότητας. Όταν το επίπεδο της δραστηριότητας αυξάνει ή μειώνεται, η αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση που οφείλεται στην αλλαγή μίας μονάδας της δραστηριότητας παραμένει ίδια. Επίσης το ποσό των πόρων που χρησιμοποιούνται σε κάθε δραστηριότητα είναι άμεσα ανάλογο με το επίπεδο της δραστηριότητας.

ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με το άθροισμα της συνεισφοράς κάθε μίας δραστηριότητας. Όμοια, το συνολικό ποσό των πόρων που χρησιμοποιείται από όλες τις δραστηριότητες είναι το άθροισμα του ποσού των πόρων που κάθε μία δραστηριότητα χρησιμοποιεί ανεξάρτητα.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

Όλες οι δραστηριότητες είναι συνεχείς και μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε θετική τιμή. Δηλαδή ο Γ.Π. δεν είναι κατάλληλος για προβλήματα που οι μεταβλητές λήψης απόφασης είναι ακέραιοι.

ΚΑΘΟΡΙΣΤΗΚΟΤΗΤΑ

Ο Γ.Π. Είναι καθοριστικό μοντέλο. Δεν παίρνει υπόψη ότι όλοι οι συντελεστές είναι προσεγγίσεις, όταν υπολογίζει μία συγκεκριμένη λύση. Γι' αυτό πρέπει να γίνεται ανάλυση ευαισθησίας.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ

1^ο στάδιο (μαθηματική έκφραση προβλημάτων)

Αντικ. συναρ. $Z=8.000T + 6.000K$
με περιορισμούς

↑ κέρδος

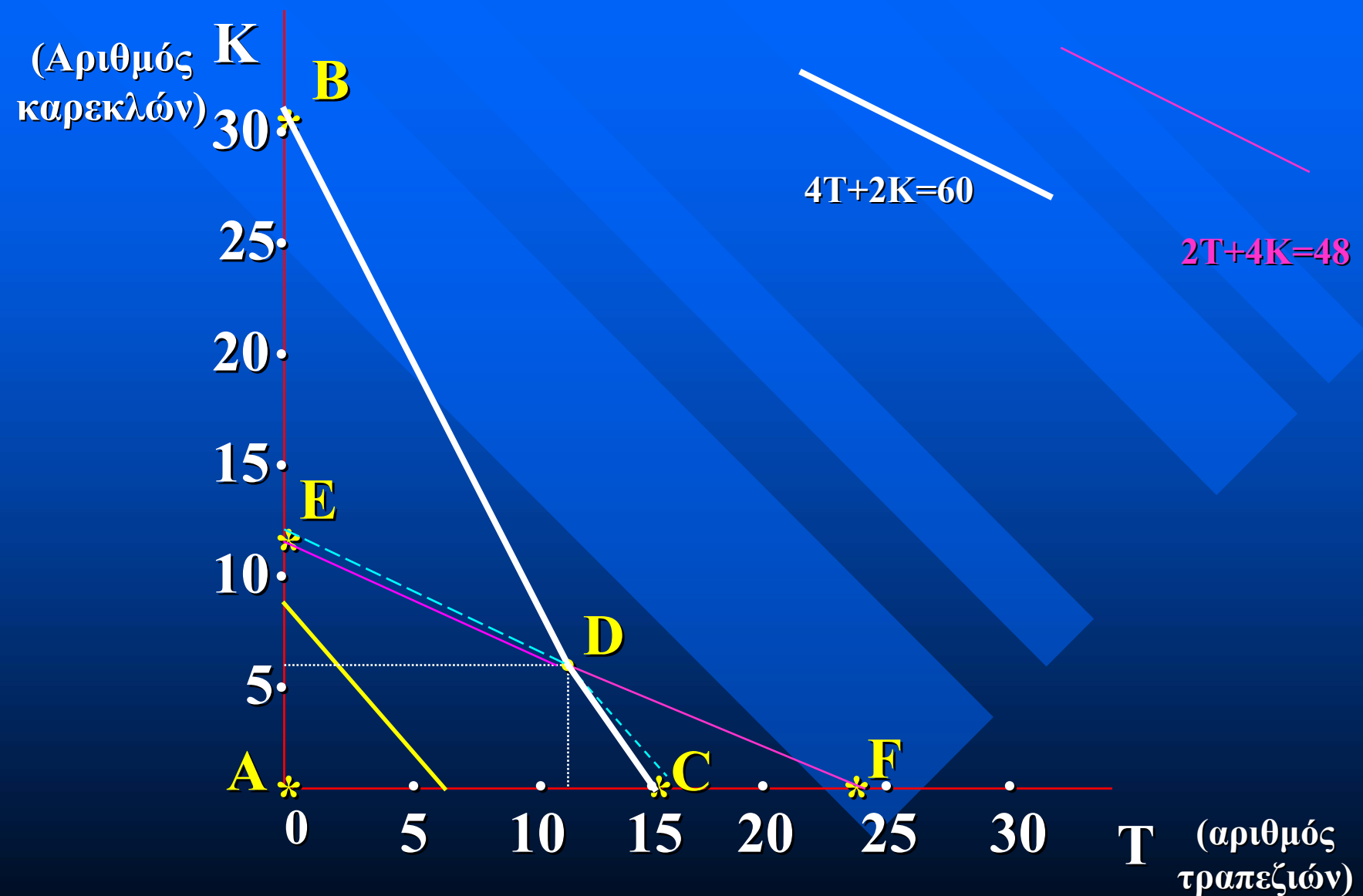
$$4T+2K \leq 60 \quad (\text{συναρμολόγηση})$$

$$2T+2K \leq 48 \quad (\text{φινίρισμα})$$

$$T \geq 0$$

$$K \geq 0$$

2^ο στάδιο (σχεδιασμός περιορισμών)



• Όλοι οι συνδυασμοί στην γραμμή BC δίνουν συνολικό χρόνο ίσο με 60 ώρες (διαθέσιμες ώρες στο τμήμα συναρμολόγησης). Όλα τα σημεία κάτω από την γραμμή δίνουν συνολικό χρόνο μικρότερο ($<$) του 60.

Άρα η περιοχή ABC = περιοχή δυνατών λύσεων του 1^{ου} περιορισμού.

Με το ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε την EF του 2^{ου} περιορισμού. Η περιοχή **AEDC** ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς .

Περιοχή εφικτών
λύσεων

3^ο στάδιο

Βρίσκουμε τα σημεία που προσδιορίζουν την περιοχή των εφικτών λύσεων.

Ήδη έχουμε

A(0,0)

B(0,12)

C(15,0)

Πως βρίσκουμε το D ;

- Είτε με ακριβέστατο γραφικό.
- Είτε αλγεβρικά.

$$4T+2K=60 \Leftrightarrow K = (60-4T)/2$$

$$2T+4(60-4T) = 48 \Leftrightarrow T=12$$

οπότε $K=6$

Άρα το D είναι
(12,6)